Exercices sur « Les ensembles »

Exercice 1

déterminer en extension les ensembles suivants :

$E=\left\{ n\in \mathbb{N}^{*}\ /\ 1+\dfrac{8}{n}\in \mathbb{N} \right\}$ ***;*** $F=\left\{ n\in \mathbb{N}\ /\ \dfrac{3n+2}{n-1}\in \mathbb{Z} \right\}$ ***;*** $G=\left\{ \left(x,y \right)\in \mathbb{Z}^{2}/xy+x+y=1 \right\}$

Exercice 2

déterminer les ensembles :

$A=\left\{ x\in \mathbb{R}/x>1\Rightarrow x>2 \right\}$ ***;*** $B=\left\{ x\in \mathbb{R}/x>1\text{ et }x>2 \right\}$ ***;*** $C=\left\{ x\in \mathbb{R}/\dfrac{3x-2}{x+2}<1 \right\}$

Exercice 3

on considère l'ensemble : $E=\left\{ \left(x,y \right)\in \left(\mathbb{N}^{*} \right)^{2}/\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5} \right\}$

1) ***Montrer que :*** $\left(x,y \right)\in E\Rightarrow x\ge 5\text{ et }y\ge 5$
2) $\left(x,y \right)\in E\Leftrightarrow \left(x-5 \right)\left(y-5 \right)=25$
3) ***déterminer l'ensemble*** E ***en extension***

Exercice 4

on considère l'ensemble : $E=\left\{ \left(x,y \right)\in \mathbb{Z}^{2}/2x^{2}+xy-y^{2}=2 \right\}$

1) ***Développer le produit*** $\left(2x-y \right)\left(x+y \right)$ ***2) déduire l'ensemble en extension***

Exercice 5:

on considère les ensembles : $E=\left\{ \dfrac{2k-1}{3}/k\in \mathbb{Z} \right\}$ ***et*** $F=\left\{ 2k+1/k\in \mathbb{Z} \right\}$

1)Montrer que : $F\subset E$ ***et*** $E\not\subset F$ ***2) déterminer*** $E\cap \left[-1,1 \right]$

Exercice 6

on considère les ensembles : $E=\left\{ \dfrac{\pi }{3}+\dfrac{k\pi }{6}/k\in \mathbb{Z} \right\}$ ***et*** $F=\left\{ \dfrac{\pi }{6}+\dfrac{k\pi }{3}/k\in \mathbb{Z} \right\}$

Montrer que : $F\subset E$ ***et*** $E\not\subset F$

Exercice 7

on considère les ensembles : $E=\left\{ \dfrac{\pi }{4}+\dfrac{2k\pi }{5}/k\in \mathbb{Z} \right\}$ ***et*** $F=\left\{ \dfrac{\pi }{2}+\dfrac{2k\pi }{5}/k\in \mathbb{Z} \right\}$ E

Montrer que les ensembles et F ***sont disjoints càd*** $E\cap F=\varnothing$

Exercice 8

on considère les ensembles : $E=\left\{ x\in \mathbb{R}\ /\ \sin^{2}x\le \dfrac{1}{2} \right\}$ ***et*** $F=\left\{ x\in \mathbb{R}/\cos^{2}x\ge \dfrac{1}{2} \right\}$

Montrer que : $E=F$

Exercice 9

on considère les ensembles $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$ *et* $F=[-1,1]$

1) *Montrer que :* $E\subset F^2$

2) *montrer par l'absurde que* E *ne peut pas s'écrire sous la forme* $A\times B$

Exercice 10

on considère l'ensemble $E=\{x+\sqrt{2}y / (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \text{ et } x^2-2y^2=1\}$

1) *Montrer que* $E\neq\varnothing$ *et* $0\notin E$

2) *Montrer que si* $a\in E$ *et* $b\in E$ *alors :* $a\times b\in E$ *et* $\frac{1}{a}\in E$

3) *Montrer que si* $a\in E$ *alors :* $(\forall n\in\mathbb{N}) : a^n\in E$

Exercice 11

déterminer les ensembles E *et* F *sachant que* $E\cap F=\{1,3,5\}$ *et* $E\cup F=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ *et* $E\setminus F=\{2,4$

Exercice 12

Soient A, B *et* C *trois parties de* E.
montrer que : $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$.