Série: Logique

EXERCICE 01

Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques puis indiquer la valeur de vérité de chacun d'elles :

P_1 : « il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2-2=0$ »

P_2 : « Pour tous rationnels x et y tels que $x<y$ il existe un rationnel z tel que : $x<z<y$ »

P_3 : Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x < p+1$ »

P_4 : « Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $n \leq m+2$ »

P_5 :« Pour tous réels x et y, $x^2+y^2=0$ si seulement si : $x=0$ et $y=0$ »

P_6 : « Pour tout réel x, si $x \in [1,+\infty[$ alors $x^2 \geq x$»

P_7 : « Tout entier naturel divisible par 3 est divisible Par 9 »

P_8 : « certains réels sont strictement supérieurs à leur carré »

EXERCICE 02

1)Donner la négation de chacune des propositions suivantes

$$P: (\forall x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x^2+1}-|x| \geq 0.$$

$$Q: (\exists x \in \mathbb{R}^+);\left(x^2 \leq x \text{ ou } 1+\frac{1}{x}<0\right)$$

$$R: (\forall y \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R});\ x^2-xy+y^2=0$$

$$S: (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$T: \forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2}: \frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow ab>0$$

$$R: \left(\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z-2}{3}\right)$$

2) Donner la valeur de vérité des propositions P; Q; R Et S.

EXERCICE 03

raisonnement par contre-exemple

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$$P: (\forall x \in]0;1[)\ \frac{2x}{x^2(1-x^2)}<1$$

$$Q: (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ x+y \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$R: (\forall x \in \mathbb{R})\ 3\cos x \neq 2\sin^2 x$$

$$S: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); \frac{4xy}{4+y^2}>1$$

$$T: (\forall x \in \mathbb{R}^*)\ x+\frac{1}{x} \geq 2$$

EXERCICE 04

raisonnement par disjonction des cas

1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \sqrt{2x^2-3x+3}-x+1>0$$

2)Montrer que le nombre $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)a-Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E): \sqrt{x^2+x+3}=2x-1$$

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(I): \sqrt{x^2+x+3} \geq 2x-1$$

4) On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}+x-2$$

a-Déterminer D_f.

b-Déterminer le tableau des signes de la fonction f

5) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ x^2-x+1 \geq |x-1|$.

6) Soit a ;b et c trois réels tels que c est positif.

$$\left(\frac{|a-b|}{2}+\frac{|a+b|}{2}\right)<c \Longrightarrow (|a|<c \text{ et } |b|<c)$$

EXERCICE 05

raisonnement par contraposée

Montrer que :

1) pour tous nombres réels x et y :

$$(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right)$$

2) pour tous nombres réels x et y et z :

$$x+y>z \Rightarrow (x>z \text{ ou } y>z)$$

3) $(\forall x \in [2,+\infty[)(\forall y \in [3;+\infty[)$:

$$(x \neq 11 \text{ ou } y \neq 28) \Rightarrow x+y-6\sqrt{x-2}-10\sqrt{y-3}+29 \neq 0$$

4) $(\forall x \in \mathbb{R});\ (x \notin [-1;4] \Longrightarrow x^2-3x-4>0)$

5) $\forall (x;y) \in (]1;+\infty[)^2;\ x \neq y \Longrightarrow x^2-2x \neq y^2-2y$

6)soit $a \in \mathbb{R}$. Prouver que :

$$[(\forall \varepsilon>0)\ |a|<\varepsilon] \Rightarrow a=0$$

7) Soit $(a;b;c) \epsilon (\mathbb{R}_+^*)^3$. Montrer que :

$$a^2+b^2+c^2<2 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} \neq \frac{1}{abc}$$

8) $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2: x \neq y \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} \neq y+\sqrt{y^2+1}$

EXERCICE 06 raisonnement par absurde

1) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ sachant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a \neq b$

Montrer que :

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \notin \mathbb{Q}$$

3) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$$

4)Soit n un entier naturel.

a-Déterminer les restes de la division euclidienne de n^2par 5.

b-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a- $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \notin \mathbb{N}$.

b- $\sqrt{n^2+7n+12} \notin \mathbb{N}$

c- $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

6) soit $a \in \mathbb{N}$. Montre que :

$$\sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}} \notin \mathbb{N}$$

EXERCICE 07 raisonnement par récurrence

Montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$1+7^1+7^2+\cdots\cdots+7^n=\frac{7^{n+1}-1}{6}$$

2) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3)$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

$$1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4)$(\forall n \epsilon \mathbb{N})$: « 17 divise $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ »

5)$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

« $10^{3n+2}+10^{3n+1}+1$est divisible par 111 »

6)$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

« $4^{n+1}+3^{2n+1}-2(-1)^n$est divisible par 5 »

7)$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

8)$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\leq 3-\frac{1}{n}$$

9) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$\frac{3n}{2n+1}\leq 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$$

10) $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$:$(1+x)^n \geq 1+nx$ (inégalité de Bernouillé).

11) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

12) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

13) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 2\sqrt{n}$$

EXERCICE 08 raisonnement par équivalences

1) Soient a , bet c des réels.

Montrer que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

2) Montrer que : $(a^3+a=b^3+b) \Leftrightarrow a=b$

3) Soit x et y deux réels strictements positifs. Montrer que :

$$x<y \Leftrightarrow \frac{x}{y}<\frac{2x+5y}{5x+2y}<\frac{y}{x}$$

4) soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que si $x \geq 1$ et $y \geq 4$ alors :

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x=2 \ et \ y=8)$$

5) Montrer que pour tout x et y de $]1;+\infty[$:

$$(x+y)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}>2$$

6) Soit x , y et z trois réels strictement positifs. Montrer que :

$$xy\sqrt{z}<xz\sqrt{y}<yz\sqrt{x} \Leftrightarrow x<y<z$$

7) Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.Montrer que

$$(x+y)(x-y)^2<0 \Leftrightarrow (x+y)^3>4(x^3+y^3)$$

EXERCICE 09 raisonnement par implication

Soit a , b deux réels.

1) Montrer l'implication suivant :

$$(|a|<1 \ et \ |b|<1) \Rightarrow |a+b|<|1+ab|$$

2) a-Vérifier que : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

b-Montrer que :

$$a^2+b^2=1 \Longrightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$$

3)a- Montrer que :

$$(\forall a \in]1;+\infty[) \ \frac{a^2}{a-1} \geq 4$$

b-En déduire que pour tout a et b de $]1;+\infty[$:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

4) a-Montrer que :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2; |a+b|=|a|+|b| \Longrightarrow ab \geq 0$$

PROF : ATMANI NAJIB