

# Exercices avec corrections

---

## Injection, surjection, bijection

---

### Enoncés : Exercices

**Exercice 1** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) = 3x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 1$ . A-t-on  $f \circ g = g \circ f$  ?

**Exercice 2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x/(1 + x^2)$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ .
3. Montrer que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$   $g(x) = f(x)$  est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de  $f$ .

**Exercice 3** On considère quatre ensembles  $A, B, C$  et  $D$  et des applications  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$ . Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

**Exercice 4** Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $f(x) = x^2 - 1$ .  $f$  est-elle bijective ?

## Injection, surjection, bijection

---

### Indication: Exercices

**Indication 1** Prouver que l'égalité est fausse.

**Indication 2** 1.  $f$  n'est ni injective, ni surjective.

2. Pour  $y \in \mathbb{R}$ , résoudre l'équation  $f(x) = y$ .

3. On pourra exhiber l'inverse.

**Indication 3** Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que  $g \circ f$  est injective, soit  $a, a' \in A$  tel que  $f(a) = f(a')$ ",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc  $a = a'$ , donc  $f$  est injective."

**Indication 4** Montrer que  $f$  est injective et surjective.

## Injection, surjection, bijection

### Corrections : Exercices

**Correction 1** Si  $f \circ g = g \circ f$  alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons  $x = 0$ . Alors  $f \circ g(0) = f(-1) = -2$ , et  $g \circ f(0) = g(1) = 0$  donc  $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$ . Ainsi  $f \circ g \neq g \circ f$

**Correction 2** 1.  $f$  n'est pas injective car  $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$ .  $f$  n'est pas surjective car  $y = 2$  n'a pas d'antécédent : en effet l'équation  $f(x) = 2$  devient  $2x = 2(1+x^2)$  soit  $x^2 - x + 1 = 0$  qui n'a pas de solutions réelles.

2.  $f(x) = y$  est équivalent à l'équation  $yx^2 - 2x + y = 0$ . Cette équation a des solutions  $x$  si et seulement si  $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$  donc il y a des solutions si et seulement si  $y \in [-1, 1]$ . Nous venons de montrer que  $f(\mathbb{R})$  est exactement  $[-1, 1]$ .

3. Soit  $y \in [-1, 1]$  alors les solutions  $x$  possibles de l'équation  $g(x) = y$  sont  $x = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$  ou  $x = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}$ . La seule solution  $x \in [-1, 1]$  est  $x = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$  en effet  $x = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1 + \sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$ . Donc pour  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  nous avons trouvé un inverse  $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  défini par  $h(y) = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$ . Donc  $g$  est une bijection.

4.  $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$ , donc  $f'$  est strictement positive sur  $] -1, 1[$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[-1, 1]$  avec  $f(-1) = -1$  et  $f(1) = 1$ . Donc la restriction de  $f, g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , est une bijection.

**Correction 3** 1. Supposons  $g \circ f$  injective, et montrons que  $f$  est injective : soit  $a, a' \in A$  avec  $f(a) = f(a')$  donc  $g \circ f(a) = g \circ f(a')$  or  $g \circ f$  est injective donc  $a = a'$ . Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

c'est la définition de  $f$  injective.

2. Supposons  $g \circ f$  surjective, et montrons que  $g$  est surjective : soit  $c \in C$  comme  $g \circ f$  est surjective il existe  $a \in A$  tel que  $g \circ f(a) = c$ ; posons  $b = f(a)$ , alors  $g(b) = c$ , ce raisonnement est valide quelque soit  $c \in C$  donc  $g$  est surjective.

3. Un sens est simple ( $\Leftarrow$ ) si  $f$  et  $g$  sont bijectives alors  $g \circ f$  l'est également. De même avec  $h \circ g$ .

Pour l'implication directe ( $\Rightarrow$ ) : si  $g \circ f$  est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point  $g$  est surjective.

Si  $h \circ g$  est bijective, elle est en particulier injective, donc  $g$  est injective (c'est le 1.). Par conséquent  $g$  est à la fois injective et surjective donc bijective.

Pour finir  $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$  est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour  $h$ .

**Correction 5** •  $f$  est injective :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ où } x, y \in [1, +\infty[ \text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- $f$  est surjective : soit  $y \in [0, +\infty[$ . Nous cherchons un élément  $x \in [1, +\infty[$  tel que  $y = f(x) = x^2 - 1$ . Le réel  $x = \sqrt{y + 1}$  convient !