

Série: Ensembles-Applications

Exercice 1 :

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice 2 :

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3 :

1. Déterminer le complémentaire dans \mathbb{R} des parties suivantes :

$$A_1 =]-\infty, 0]; A_2 =]-\infty, 0[; A_3 =]0, +\infty[; A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1, 2[; A_6 = [1, 2[.$$

2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :

$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice 4 :

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de \mathbb{R} .

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B))$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 5 :

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que :

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . On suppose que :

$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$

On pose

$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E (A \cup B)$$

- Montrer que A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont non vides.
- Montrer que A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
- Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Exercice 7 :

1. Déterminer le complémentaire dans \mathbb{R} des parties suivantes :

$$A_1 =]-\infty, 0]; A_2 =]-\infty, 0[; A_3 =]0, +\infty[; A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1, 2[; A_6 = [1, 2[.$$

2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :

$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice 8 :

Justifier les énoncés suivants.

- Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E . Si A est inclus dans B , alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E .
- Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E . Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B .
- Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E . Déterminer les ensembles suivants :
 $C_E(C_E A)$; $A \cap C_E A$; $A \cup C_E A$; $C_E \emptyset$; $C_E E$

Exercice 9 :

- Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice 10 :

On rappelle que l'on note

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Montrer que

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$$

- En déduire que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

Exercice 11 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E , on note

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

- Montrer que pour toutes parties A , B et C d'un ensemble E .

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cup C) \cap (\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

- En déduire que

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \overline{A} \cap (B \Delta C)$$

Exercice 12 :

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

- On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
-

Exercice 13 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer les égalités suivantes :

- $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
Si $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$

Exercice 14 :

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E . Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Exercice 15 :

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta \emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A , B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
 - a) Montrer que : $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$
 - b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$
 - c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
 - d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
 - e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Exercice 16 :

Soit $f: I \rightarrow J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 17 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$	$f: [0,1] \rightarrow [0,2]$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x + x^3$	$x \mapsto x^2 + x^3$	$x \mapsto x + x^4$

Exercice 18 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $f: I \rightarrow J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f: I \rightarrow K$ soit bijective.

Exercice 19 :

Soit $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Exercice 20 :

Soient

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n & n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 21 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f(f(E)) = E$$

Montrer que f est surjective.

Exercice 22 :

On considère l'application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Exercice 23 :

Soit $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Exercice 24 :

Soit $f: E \rightarrow F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) f est injective
- (ii) f est surjective
- (iii) f est bijective

Exercice 25 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une application

(i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.

4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Exercice 26 :

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{Q}$ l'application définie par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$

a. Montrer que f est injective ?

b. f est-elle surjective ?

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Exercice 28 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \rightarrow I_n$?

2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \rightarrow I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 29 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?

4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

6. Si à présent $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

a. $g \circ f = Id_E$

b. $f \circ g = Id_F$

$$c. f \circ f = Id_E$$

Exercice 30 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y . Une application s , de Y dans X , telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f .

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r , de Y dans X , telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f .

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r , alors f est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

Exercice 31 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F . Soient A et B deux parties de E , montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E , on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 32 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2.$$

Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.

2. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Exercice 33 :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Exercice 34 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F . Soient A' et B' deux parties quelconques de F , non vides. Montrer que :

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Exercice 35 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E , on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Montrer que pour toute partie B de F , on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 36 :

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

- b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..
3. Est-ce que f est surjective ?