Ensembles Applications

EXERCICES

A - Ensembles

Exercice 1.

1. Soient $A = \{2,3,4,5\}$ et $B = \{4,5,6\}$. Déterminer :

$$A \cap B \quad , \quad A \cup B \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} B \quad , \quad \complement_{A \cup B} A$$

2. Soient les intervalles (de $\mathbb{R}$) $I = [1,3]$ et $J = [2,4]$. Déterminer :

$$I \cap J \quad , \quad I \cup J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} I \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}}(I \cup J).$$

Exercice 2.

1. Soit A une partie d'un ensemble E. Déterminer $\complement_E \left(\complement_E A\right)$ et $A \cup \complement_E A$.
2. Montrer que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on a

$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B.$$

3. Montrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A.$$

Exercice 3.

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.
Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 4.

Soient E un ensemble, et F, G deux parties de E. Montrer

$$F \subset G \iff F \cup G = G$$
$$F \subset G \iff \complement_E F \cup G = E$$

Exercice 5. (Examen janvier 2007)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) \;=\; (E \setminus A) \;\cup\; (E \setminus B)$$

Exercice 6. (DM1 2007)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \cup B \cup C \;=\; (A \setminus B) \;\cup\; (B \setminus C) \;\cup\; (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$$

B - Applications

B - 1 Images, antécédents

Exercice 7.
Soit f_1 définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1 Déterminer les images de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.

Exercice 8.
Pour l'application f_2 définie par :

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x-3y, -4x+6y) \end{array}$$

1 Déterminer les images de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,-2)$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,-2)$.

Exercice 9.
Pour l'application f_3 définie par :

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y \end{array}$$

1 Déterminer les images de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1.

Exercice 10.
Pour l'application f_4 définie par :

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (x^2, x+5) \end{array}$$

1 Déterminer les images de 0, 1, -1.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)\,(-1,0)$, $(1,6)$.

Exercice 11.
Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on définit l'application χ_A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \chi_A(x) & = & 1 \quad \text{si } x \in A \\ \chi_A(x) & = & 0 \quad \text{si } x \notin A \end{array}\right.$$

Dessiner le graphe de la fonction χ_A lorsque A est la partie de $\mathbb{R}$: $A = [1;2[\cup\{3\}$.

B - 2 Image directe et image réciproque

Exercice 12.
On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.
1 Déterminer les images directes :

$$f(\{-1,2\}) \quad ; \quad f([-3,-1]) \quad ; \quad f([-3,1]).$$

2 Déterminer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{4\}) \quad ; \quad f^{-1}(\{-1\}) \quad ; \quad f^{-1}([-1,4]).$$

Exercice 13.
Pour l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\pi x) \end{array}$$

calculer les images directes :

$$f(\{0,1\}), \quad f([0,1/2]), \quad f(\mathbb{Z}), \quad f(2\mathbb{Z}),$$

où $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 14.
On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

1 Calculer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(]-\infty,0]), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(]-1,1]), \quad f^{-1}(]4,+\infty[).$$

2 Calculer les images directes :
a $f(X_1)$ où $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x > 0\}$.
b $f(C)$ où $C = [0,1]\times[-2,3]$.

B - 3 Composition des applications

Exercice 15.
On considère les applications f et g suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Les expressions $f\circ g$ et $g\circ f$ ont-elles un sens ? Si oui les expliciter.

Exercice 16.
Mêmes questions avec f et g définies par :

$$\begin{array}{rcl} f :]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g :]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

B - 4 Injection, surjection, bijection

Exercice 17.
On considère les deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{c, d, e\}$.
Déterminer toutes les applications de E dans F et dire, pour chacune d'entre elles, si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 18.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7x-1 \end{array}$$

1 Montrer que f et g sont bijectives.
2 Déterminer f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$ et $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 19.
L'application $h : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 3n \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 20.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,x^2) \end{array}$$

1 Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2 Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 21.
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer que :

$$f \text{ et } g \text{ surjectives } \Longrightarrow g \circ f \text{surjective },$$

$$f \text{ et } g \text{ injectives } \Longrightarrow g \circ f \text{injective.}$$

Exercice 22.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b}$ l'application

$$f_{a,b}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b. \end{array}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a, b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors $a = c$ et $b = d$.
3. *facultatif :* Interpréter la dernière condition en terme d'injectivité d'une certaine application.
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son inverse.

Exercice 23.
Dire si les applications f de E dans F suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Dans le cas où l'application est bijective, déterminer son application réciproque.
1 $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f : (x, y) \mapsto x + y$.

2 $E = F = \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
3 $E = F = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f : A \mapsto \complement_{\mathbb{N}} A$.

Exercice 24.
On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x(1-x). \end{array}$$

1. Calculer $f^{-1}(\{y\})$ pour tout réel y. Pourquoi la valeur $y = 1/4$ est-elle particulière ? Est-ce que f est injective ? Surjective ?
2. Trouver deux intervalles I et J, aussi grands que possibles, tels que l'application $I \to J$ donnée par "la même formule" que f soit une bijection.

Exercice 25.
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$$

où $E[x]$ est la partie entière de x, c'est-à-dire $E[x] \in \mathbb{N}$ et $E[x] \le x < E[x] + 1$.

1 Les applications f et g sont-elles bijectives ?
2 Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bijectives ?

Exercice 26.
Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G .
1 On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.
2 On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.
3 On suppose que $g \circ f$ et g sont bijectives, f est-elle bijective ?

C - Autres exercices

Exercice 27.
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.
1 **a** Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \subset f^{-1}(f(A))$$

b Montrer que si f est injectif, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A = f^{-1}(f(A))$$

c Donner un exemple d'application f telle que :

$$\exists A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \neq f^{-1}(f(A))$$

2 **a** Montrer que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$$

b Montrer que si f est surjectif, on a :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B$$

c Donner un exemple d'application f telle que :

$$\exists B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f\left(f^{-1}(B)\right) \neq B$$