Injection, surjection, bijection

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice 1

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-1$. A-t-on $f\circ g=g\circ f$?

Exercice 2

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ telle que

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1-x & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démontrer que $f\circ f=id$.

Exercice 3

Soit $f:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ telle que $f(x)=x^2-1$. f est-elle bijective ?

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto n+1$
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, n\mapsto n+1$
3. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$
4. $k:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$

Exercice 5

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ t\mapsto e^{it}$. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) f devienne bijective.

Exercice 6 Exponentielle complexe

Si $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $e^z=e^x\times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n\in\mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

Exercice 7

On considère quatre ensembles A,B,C et D et des applications $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Montrer que :

$$g\circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g\circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\left(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives }\right) \Leftrightarrow \left(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\right).$$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Indication pour l'exercice 1 ▲

Prouver que l'égalité est fausse.

Indication pour l'exercice 2 ▲

id est l'application identité définie par $id(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $f \circ f = id$ signifie $f \circ f(c) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Montrer que f est injective et surjective.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. f est injective mais pas surjective.
2. g est bijective.
3. h aussi.
4. k est injective mais par surjective.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Montrer que la restriction de f définie par : $[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est une bijection. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que $g \circ f$ est injective, soient $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc $a = a'$, donc f est injective."

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$.
3. On pourra exhiber l'inverse.

Correction de l'exercice 1 ▲

Si $f\circ g = g\circ f$ alors
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f\circ g(x) = g\circ f(x).$$
Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x=0$. Alors $f\circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g\circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f\circ g(0)\neq g\circ f(0)$. Ainsi $f\circ g\neq g\circ f$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x)=x$ donc $f\circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$ donc $f\circ f(x) = f(1-x)$, mais $1-x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f\circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$. Donc pour tout $x\in[0,1]$ on a $f\circ f(x) = x$. Et donc $f\circ f = id$.

Correction de l'exercice 3 ▲

- f est injective : soient $x,y\in[1,+\infty[$ tels que $f(x)=f(y)$:
$$\begin{aligned} f(x)=f(y) &\Rightarrow x^2-1 = y^2-1\\ &\Rightarrow x=\pm y \text{ or } x,y\in[1,+\infty[\text{ donc } x,y \text{ sont de même signe}\\ &\Rightarrow x=y. \end{aligned}$$
- f est surjective : soit $y\in[0,+\infty[$. Nous cherchons un élément $x\in[1,+\infty[$ tel que $y=f(x)=x^2-1$. Le réel $x=\sqrt{y+1}$ convient !

Correction de l'exercice 4 ▲

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n\in\mathbb{N}$ tel que $f(n)=0$ (si ce n existait ce serait $n=-1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$). Par contre f est injective : soient $n,n'\in\mathbb{N}$ tels que $f(n)=f(n')$ alors $n+1=n'+1$ donc $n=n'$. Bilan f est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que g est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que g est à la fois injective et surjective. En effet soient $n,n'\in\mathbb{Z}$ tels que $g(n)=g(n')$ alors $n+1=n'+1$ donc $n=n'$, alors g est injective. Et g est surjective car chaque $m\in\mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n=m-1\in\mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n)=m$. Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction $g':\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définie par $g'(m)=m-1$ alors $g'\circ g(n)=n$ (pour tout $n\in\mathbb{Z}$) et $g\circ g'(m)=m$ (pour tout $m\in\mathbb{Z}$). Alors g' est la bijection réciproque de g et donc g est bijective.
3. Montrons que h est injective. Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tels que $h(x,y)=h(x',y')$. Alors $(x+y,x-y) = (x'+y',x'-y')$ donc
$$\begin{cases} x+y &= x'+y'\\ x-y &= x'-y' \end{cases}$$
En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x=2x'$ donc $x=x'$ et avec la différence on obtient $y=y'$. Donc les couples (x,y) et (x',y') sont égaux. Donc h est injective.
Montrons que h est surjective. Soit $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x,y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x,y)=(X,Y)$, donc $(x+y,x-y)=(X,Y)$ ou encore :
$$\begin{cases} x+y &= X\\ x-y &= Y \end{cases}$$
Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x=\frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y=\frac{X-Y}{2}$, donc $(x,y)=(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple (x,y) que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour !). Bilan pour (X,Y) donné, son antécédent par h existe et est $(\frac{X+Y}{2},\frac{X-Y}{2})$. Donc h est surjective.

En fait on pourrait montrer directement que h est bijective en exhibant sa bijection réciproque $(X,Y) \mapsto (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.

4. Montrons d'abord que k est injective : soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $k(x) = k(x')$ alors $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$ donc $(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1)$. En développant nous obtenons $xx' + x' - x = xx' - x' + x$, soit $2x = 2x'$ donc $x = x'$.

   Au brouillon essayons de montrer que k est surjective : soit $y \in \mathbb{R}$ et cherchons $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $f(x) = y$. Si un tel x existe alors il vérifie $\frac{x+1}{x-1} = y$ donc $x+1 = y(x-1)$, autrement dit $x(y-1) = y+1$. Si l'on veut exprimer x en fonction de y cela se fait par la formule $x = \frac{y+1}{y-1}$. Mais attention, il y a un piège ! Pour $y = 1$ on ne peut pas trouver d'antécédent x (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc k n'est pas surjective car $y = 1$ n'a pas d'antécédent.

   Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction $k_| : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est définie aussi par $k_|(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (seul l'espace d'arrivée change par rapport à k) alors cette fonction $k_|$ est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

Correction de l'exercice 5 ▲

Considérons la restriction suivante de f : $f_| : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$. Montrons que cette nouvelle application $f_|$ est bijective. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation $(|z| = 1)$.

- $f_|$ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.
- $f_|$ est injective :

$$\begin{aligned} f_|(t) = f_|(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0. \end{aligned}$$

En conclusion $f_|$ est injective et surjective donc bijective.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Pour $z = x + iy$, le module de $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ est e^x et son argument est y.
2. Les résultats : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
3. La fonction exp n'est pas surjective car $|e^z| = e^x > 0$ et donc e^z ne vaut jamais 0. La fonction exp n'est pas non plus injective car pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{z+2i\pi}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soient a, $a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

   c'est la définition de f injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.
3. Un sens est simple $(\Leftarrow)$ si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.

   Pour l'implication directe $(\Rightarrow)$: si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2. g est surjective.

Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.

Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1+x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.
2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.
3. Soit $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Pour $y = 0$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 0$. Donc pour $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ si $y \neq 0$ et $h(0) = 0$. Donc g est une bijection.
4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1,1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1,1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f, appelée $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, est une bijection.
