

Série: Fonctions, applications

PROF : ATMANI NAJIB

1 Domaines et compositions

EXERCICE 1

On donne $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer $f(\{a, b, c\})$ et $f^{-1}(\{1, 3\})$ pour les applications $f : E \rightarrow F$ suivantes :

1. $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 4, f(d) = 2$;
2. $f(a) = f(b) = 2, f(c) = f(d) = 3$;
3. $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$.

EXERCICE 2

On donne $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Soient f et g les fonctions (au sens de « relation fonctionnelle ») de E dans F et de F dans E respectivement définies de la manière suivante : $f(b) = 3, f(c) = 4, f(d) = 2$ et $g(1) = a, g(2) = b, g(3) = c$.

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

EXERCICE 3

Considérons les fonctions f et g données par les formules $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ pour x réel.

1. Déterminer les plus grands sous-ensemble (au sens de l'inclusion) de \mathbb{R} sur lesquels les fonctions suivantes sont définies : $f, g, f \circ g, g \circ f, f \circ f$ et $g \circ g$.
2. Calculer $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ et $g \circ g$. Conclure.

2 Image directe, image réciproque

EXERCICE 4

On donne les fonctions réelles f et g en spécifiant $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Déterminer les domaines de définition de $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Déterminer l'ensemble image (c'est-à-dire l'image de leur domaine de définition) de $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$.

EXERCICE 5

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et soient A et B deux parties de E .

1. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et trouver un exemple qui montre que l'inclusion peut être propre.

EXERCICE 6

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et soient C et D deux parties de F .

1. Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. Démontrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

EXERCICE 7

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ est injective.
2. f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ est surjective.
3. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ est surjective. Trouver un exemple où f n'est pas surjective.
4. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ est injective. Trouver un exemple où g n'est pas injective.

EXERCICE 8

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- Déterminer : (i) $f([-1, 1])$, (ii) $\text{Im}(f)$, (iii) $f^{-1}([0, 1])$, (iv) $f^{-1}(]-\infty, 0])$.
- L'application f est-elle injective, surjective, bijective?

EXERCICE 9

Soit A un ensemble non vide et B l'ensemble des applications $f : A \rightarrow \{0, 1\}$. On définit une application $g : B \rightarrow \mathcal{P}(A)$ de la façon suivante : $g(f) = f^{-1}(\{1\})$.

- Montrer que g est une bijection.
- Que peut-on dire si $A = \emptyset$?

4 Réciproque

EXERCICE 10

Soit $f : E \rightarrow E$ une bijection, et f^{-1} sa réciproque. Justifier que $f \circ f^{-1}$ est bijective et que $(f \circ f^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ f$.

EXERCICE 11

On considère l'application $f : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(x) = (x + 1)^2$. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

EXERCICE 12

On considère l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

EXERCICE 13

On considère l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2 + 2x$.

- Est-elle injective, surjective, bijective?
- Déterminer deux intervalles I et J tels que l'application $\tilde{h} : I \rightarrow J$, définie par $\tilde{h}(x) = x^2 + 2x$ soit bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

5 Exercices complémentaires

EXERCICE 14

Choisir et représenter graphiquement une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

- $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) < x$.

EXERCICE 15

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Exprimer formellement (en langage mathématique) chacune des affirmations suivantes sur f et sa négation. Dans chaque cas trouver un exemple de fonction qui vérifie l'affirmation et un exemple de fonction qui vérifie sa négation.

- La fonction f est majorée.
- La fonction f est bornée.
- La fonction f ne s'annule jamais.
- La fonction f est croissante.
- La fonction f est décroissante et positive.
- La fonction f est périodique.
- Les valeurs de la fonction f sont ≤ 1 .
- Il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq 0$.
- Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

EXERCICE 16

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et soient A et B deux parties de E .

- Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective.

2. Démontrer que si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour toutes parties $A, B \subset E$, alors f est injective.

EXERCICE 17

L'application suivante est-elle injective, surjective, bijective?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

EXERCICE 18

Soit $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ une application d'un ensemble A vers son ensemble des parties $\mathcal{P}(A)$. On définit l'ensemble de Cantor associé à f , noté \mathcal{C}_f , par :

$$\mathcal{C}_f := \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

1. Montrer que pour tout $a \in A$ on a l'inégalité $f(a) \neq \mathcal{C}_f$.
2. En déduire qu'il n'existe aucun ensemble A qui admet une application surjective $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$.
3. Montrer le même énoncé pour A fini en utilisant les faits connus (voir l'exercice 10, question 3, de la planche TD2) regardant la cardinalité de A et $\mathcal{P}(A)$.
4. Discuter une possible définition de $\text{card}(A)$ pour les ensembles infinis A .

EXERCICE 19

Soit $f : E \rightarrow E$ une application et soient $A \subset E$ et $B \subset F$ des sous-ensembles.

1. Montrer que $A \mapsto f(A)$ définit une application $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $B \mapsto f^{-1}(B)$ définit une application $\mathcal{P}f^{-1} : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
3. Donner une preuve ou trouver un contre-exemple pour $\mathcal{P}f \circ \mathcal{P}f^{-1} = \text{id}_{\mathcal{P}(F)}$.
4. Donner une preuve ou trouver un contre-exemple pour $\mathcal{P}f^{-1} \circ \mathcal{P}f = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

EXERCICE 20

On considère les fonctions réelles f_n (où $n = 1, \dots, 5$) suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \ln x, & x \geq e \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} (x-1)/(x^2+1), & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_5(x) = |x - 2k| \text{ où } k \in \mathbb{Z} \text{ est l'unique valeur telle que } x \in]2k - 1; 2k + 1].$$

Pour chacune de ces fonctions :

1. donner l'ensemble de définition et spécifier s'il s'agit d'une application ;
2. dessiner le graphe ;
3. établir si la fonction est (a) injective, (b) surjective, (c) bijective ; si elle est bijective, donner l'application réciproque ; si elle est injective donner la fonction réciproque dont on spécifiera l'ensemble de définition ;
4. déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([0, 1])$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$;
5. dire si, sur son ensemble de définition, la fonction est : majorée, minorée, bornée, monotone (en spécifiant quel type), périodique.

EXERCICE 21

Soit f une application de E dans F avec $A \subset E$ et $B \subset F$. Donner les définitions de $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(f^{-1}(B))$ et $f^{-1}(f(A))$

EXERCICE 22

Soit f une application de E dans F avec $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Donner $f^{-1}(B)$ quand $f = \sin$, et $B =] - 1/2; 1/2[$ ($E = F = \mathbb{R}$).

EXERCICE 23

Soit f une application de E dans F avec $X \subset E$ et $Y \subset F$.

1. Montrer que $X \subset f^{-1}(f(X))$.

2. Donner $f(f^{-1}(Y))$ quand $f = \tan$, et $Y =]0; 1[$ ($E =] - \pi/2; \pi/2[$ et $F = \mathbb{R}$).

EXERCICE 24

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Donner la définition d'une application injective.

2. Montrer que $g \circ f \Rightarrow f$ est injective.

Donner un exemple où $g \circ f$ est injective mais pas g .

EXERCICE 25

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Donner la définition d'une application surjective.

2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective mais pas f .

EXERCICE 26

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Donner la définition d'une application bijective.

2. Montrer que f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ est bijective.

EXERCICE 27

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

1. Montrer que f est ni injective, ni surjective.

2. Donner les plus grands sous-ensembles E et F de \mathbb{R} tels que la fonction $g : E \rightarrow F$ définie par $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ soit bijective. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).

EXERCICE 28

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x^2+1}$.

1. Montrer que f est ni injective, ni surjective.

2. Donner les plus grands sous-ensembles E et F de \mathbb{R} tels que la fonction $g : E \rightarrow F$ définie par $g(x) = e^{x^2+1}$ soit bijective. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).

EXERCICE 29

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

1. Montrer que f est ni injective, ni surjective.

2. Donner les plus grands sous-ensembles E et F de \mathbb{R} tels que la fonction $g : E \rightarrow F$ définie par $g(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ soit bijective. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).