

Série d'exercices : Notion d'applications

<http://www.xriadiat.com>

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice n°1

Déterminer toutes les applications h de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même telles que pour tout x et tout y de E , on ait $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

Exercice n°2

On note E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $A = \{f \in E ; f(3) = 2f(1)\}$.

- 1) L'application $g : x \mapsto x^2$ appartient-elle à A ? Même question pour $h : x \mapsto x + 1$.
- 2) A quelle condition sur a et b , l'application $f : x \mapsto ax + b$ appartient-elle à A ?

Exercice n°3

On note E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

- 1) Les applications définies ci-dessous appartiennent-elles à A ?

a) f est une application constante

b) $f : x \mapsto 3x - 1$

c) $f : \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

d) $f : \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$

- 2) On suppose que f appartient à A .

a) Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(4t) = f(t)$.

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

COMPOSITION D'APPLICATIONS

Exercice n°4

Soit l'application définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 4$ et g l'application définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x - 1}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice n°5

On définit deux fonctions f et g sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ x - 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercice n°6

On définit deux applications f et g de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2/3] \\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ? Trouver un sous-ensemble de $[0, 1]$ sur lequel $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes restrictions.

INJECTION - SURJECTION - BIJECTION

Exercice n°7

Donner des fonctions réciproques des fonctions suivantes, en précisant le domaine de définition

1) $f_1(x) = \sqrt{x-1}$

2) $f_2(x) = \begin{cases} 3/2 - x/2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice n°8

Soit f l'application de \mathbb{R} dans $] -1, 1[$ définie par $f(x) = x/(1+|x|)$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .

Exercice n°9

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x+5}{x-1} \end{cases}$.

- 1) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
- 2) Montrer qu'il existe un sous-ensemble F de \mathbb{R} et une bijection g de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur F tels que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer g^{-1} .

Exercice n°10

Soient f une application de E dans F , g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

- 1) Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.
- 2) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
- 3) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°11

Soient un ensemble E et f une application de E dans E .

On définit par récurrence sur n f^n par $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$.

- 1) On suppose f injective. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f^n est injective.
- 2) On suppose f surjective. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f^n est surjective.

ANTÉCÉDENTS ET IMAGE

Exercice n°12

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.

- 1) Donner la définition de $f^{-1}(\{4\})$. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.
- 2) L'application f est-elle bijective ?
- 3) Donner la définition de $f([-1, 1])$. Calculer $f([-1, 1])$.
- 4) Donner la définition de $f^{-1}([-2, 4])$. Calculer $f^{-1}([-2, 4])$.

Exercice n°13

Soit l'application $E : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto E(x) \text{ où } E(x) \text{ est l'unique } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x < n + 1. \end{cases}$

- 1) Tracer le graphe de E pour $x \in [-2, 2]$.
- 2) L'application E est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- 3) Déterminer $E(]0, 2[)$, $E^{-1}(]0, 2[)$, $E(E^{-1}(]0, 2[))$.
- 4) Expliciter $E \circ E$.