Série d'exercices
ENSEMBLE ET APPLICATION

Exercice 1 : On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^4.$$

- Déterminer $f(A)$ lorsque A vaut $[-2,1]$, $\{0,1\}$ et $\{-1,1\}$.
- Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque B vaut $[0,2]$, $[-1,4]$, $[-2,-1]$, $[1,4]$ et $\{3\}$.
- La fonction f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 1.$$

Déterminer les ensembles images $f(\mathbb{R})$, $f([2,3])$ et $f([-1,1])$ ainsi que les préimages $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

Exercice 3 : Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? Donner l'application réciproque dans les cas où l'application est bijective.

(a) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \longmapsto 2n$; (b) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \longmapsto -n$

(c) $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto n+1$; (d) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \longmapsto n+1$

(e) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$; (f) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^2$

Exercice 4 : Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

(a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$;

(b) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto 4x^3 + x$.

Exercice 5 : Soient $f\colon E \to G$ et $g\colon G \to G$ deux applications, montrer que :

- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ;
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Montrer que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 6 : Soit $f\colon E \to G$ une application. Montrer que :

- f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
- f est surjective si et seulement si pour tout $B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longmapsto \mathbb{R} \setminus \{2\}$ l'application définie par :

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}\cdot$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par :

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 9 : Soit E un ensemble et $f\colon E \to \mathcal{P}(E)$ une application de E dans l'ensemble de ses parties. On considère

$$A = \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

- Montrer $A \notin \mathrm{Im}(f)$;
- En déduire que f n'est pas surjective.

Exercice 10 : On dit qu'un ensemble A est fini s'il existe un entier naturel n et une bijection de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ dans A. L'entier n est unique et est appelé le cardinal de A, noté $\mathrm{card}\,(A)$.

Soient A et B deux ensembles finis, montrer que l'on a $\mathrm{card}\,(A) = \mathrm{card}\,(B)$ si et seulement si il existe une bijection de A dans B.

Soient A et B deux ensembles finis, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{card}\,(A) \leq \mathrm{card}\,(B)$;
- Il existe une application injective de A dans B.
- Il existe une application surjective de B dans A.