# Série:EXERCICES

# Applications - Injections Surjections - Bijections

## EXERCICE 1

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \text{ pair} \mapsto \dfrac{n}{2} \\ n \text{ impair} \mapsto \dfrac{n-1}{2} \end{cases}$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f$ et $g$.
Que vaut $g \circ f$ ? Que peut-on conclure ?

## EXERCICE 2

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto g(0) = 0 \\ n \neq 0 \mapsto g(n) = n-1 \end{cases}$

Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ mais que ni $f$, ni $g$ ne sont bijectives.

## EXERCICE 3

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

a) Déterminer l'image de $f$.

b) Montrer que $f$ est injective sur $[-1,1]$ et déterminer $\left(f_{|[-1;1]}\right)^{-1}$

c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{4};1\right]\right)$

## EXERCICE 4

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x\ln x + \dfrac{1}{x}$

a) Sur quels intervalles (les plus grands possibles) $f$ est-elle injective ?

b) Déterminer $f\left(\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right]\right)$

## Exercice 5

Soit $E$ un ensemble et $A$ et $B$ deux parties de $E$.

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ \quad X \ \mapsto (X \cap A\ ,\ X \cap B) \end{cases}$

a) Montrer que $f$ est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$

b) Montrer que $f$ est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$

## Exercice 6

Les applications suivantes sont-elles injectives ? sujectives ? bijectives ?

a) $f_1 : (x,y) \mapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

b) $f_2 : (x,y) \mapsto (1\ ,\ x-y\ ,\ y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

c) $f_3 : (x,y) \mapsto (2x+y\ ,\ 3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

d) $f_4 : (x,y,z) \mapsto (x+y+z\ ,\ x-y-z\ ,\ x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

## Exercice 7

Soit l'application $f$ de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même : $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}\ ,\ \dfrac{2xy}{x+y}\right)$

a) $f$ est-elle injective ?

b) Déterminer son image.

## Exercice 8

Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications.

On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer alors que $f$ et $g$ le sont aussi.

## Exercice 9

Soit $E$ un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que $f$ est injective ou surjective.

Montrer alors que $f = \mathrm{Id}_E$.

## Exercice 10

Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que $f$ est injective si, et seulement si, $f$ est surjective.

## Exercice 11

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$

## Exercice 12

Déterminer toutes les injections $f$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$

## Exercice 13

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f \circ f(n) = 2n$$