Exercice 1 *On considère la fonction* $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

Montrer que : a) 3 est le maximum absolu de f en 1. b) -1 est le minimum absolu de f

Exercice 2 *On considère la fonction* $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$

1. montrer pour tout x et y de IR tel que $x \neq y$ *on a* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{(2x+1)(2-y)+(2y+1)(2-x)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

2. en déduire les variations de f sur chacun des intervalles $[2,+\infty[$ *et* $\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$ *et* $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$

3. Déterminer le maximum absolu et le minimum absolu de f .

4. montrer que $f([2,+\infty[)=]0,1]$

5. On considère la fonction $g(x)=\dfrac{4x-3x^2}{1+x^2}$

a) montrer que $(\forall x\neq 0): g(x)=f(\dfrac{1}{x})$

b) en déduire les variations de la fonction g sur chacun des intervalles

$[2,+\infty[$, $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$, $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{2},0\right[$, $\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$ *et* $]-\infty,-2]$.

Exercice 3 *On considère les deux fonctions* $f(x)=\sqrt{x+1}$ *et* $g(x)=-x^3$

1. construire dans un même repère les courbes C_f *et* C_g .

2. en déduire que l'équation $x^3+\sqrt{1+x}=0$ *admet une solution unique* α *tq* $-\dfrac{7}{8}<\alpha<-\dfrac{3}{4}$

3. résoudre dans $[-1,+\infty[$ *l'inéquation* $x^3+\sqrt{1+x}<0$.

4. déterminer graphiquement $f([-1,2])$ *et* $f([3,+\infty[)$.

Exercice 4 *On considère les deux fonctions* $f(x)=\sqrt{x+1}$ *et* $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

Déterminer le domaine de définition la fonction $h=g\circ f$ *puis étudier ses variations .*

Exercice 5 *On considère les deux fonctions* $f(x)=x^2-2x$ *et* $g(x)=x^2-4x+5$

Etudier les variations de la fonction $h=g\circ f$

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{8x+4}{x^2+2x+1}$

1) déterminer D_f .

2) Montrer que f admet un maximum absolu .

3) On considère la fonction g définie par : $g(x)=4-x^2$.

a) Déterminer une fonction h telle que : $(\forall x\in D_f): f(x)=goh(x)$

b) En déduire les variation de f .

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3+x^2+x$

1) a) Montrer que $(\forall (x,y)\in IR^2)$: $x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$

b) En déduire que f est croissante sur IR .

2) On considère la fonction g définie sur IR_+^* *par* $f(x)=\dfrac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

a) Montrer que $(\forall x \in IR_+^*) : g(x) = f(\frac{1}{\sqrt{x}})$

b) En déduire les variatins de g sur IR_+^* .

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

1) déterminer D_f .

2) Montrer que $(\forall x \in D_f) : f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

3) Etudier les variations de f sur IR^+ puis sur IR^- .

4) Soit g la restriction de f sur IR^+

Montrer que g est une bijection de IR^+ sur $[1, +\infty[$ puis déterminer sa bijection réciproque .

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur par $f(x) = \frac{1}{x+1}\sqrt{x^2 - 1}$

1) déterminer D_f .

2) on considère la fonction g définie par : $g(x) = (f(x))^2$

Donner le tableau de variation de g puis celui de f .

Exercice 10 On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. montrer que $(\forall x \in IR) : -1 < f(x) < 1$
2. Montrer que 1 et -1 ne sont pas des extremums de la fonction f .

Exercice 11 On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = (1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{1-x})$

1. montrer que $(\forall x \in]0,1[) : f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x}$.
2. étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
3. qu'elle est la valeur maximale que prend le nombre $A = (1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ lorsque a et b

décrivent IR_+^* en vérifiant $a + b = 1$.

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - 2\sqrt{x-1}$

1. déterminer $A = \overset{-1}{f}(\left\{-\frac{1}{2}\right\})$ et en déduire que f n'est pas injective .
2. On considère les deux fonctions $u(x) = x^2 - 2x$ et $v(x) = \sqrt{x-1}$

   a) montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f(x) = (u \circ v)(x)$

   b) étudier les variation de f

   c) en déduire que f n'est pas surjective de $[1, +\infty[$ vers IR .
3. déterminer le maximum absolu de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}(1 - 2\sqrt{x - x^2}) - 1$

sur l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$

Exercice 13

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}-2}{\sqrt{|x|}+2}$

1. *déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité .*
2. *étudier les variations de f .*
3. *a) montrer que pour tout* $x \in IR$ *on a* $-1 \leq f(x) < 1$

   b) montrer que -1 est le minimum absolu de f , et que f n'admet pas de maximum absolu .
4. *montrer que f est une bijection de* IR^{+} *vers* $\left[-1,1\right[$ *, puis déterminer sa bijection réciproque .*

Exercice 14

On considère la fonction définie sur IR^{+} *par* $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1+x}$

1. *montrer que -1 est le minimum absolu de f*
2. *montrer que la fonction f n'est pas majorée .*

Exercice 15

On considère les deux fonctions définies $f(x)=x^{2}-2x+2$ *et* $g(x)=\sqrt{x-1}+1$

1. *étudier les variations des deux fonctions f et g .*
2. *soit h la restriction de f à l'intervalle* $\left[1,+\infty\right[$ *.*

   a) montrer que $f\circ h$ *et* $h\circ f$ *sont définies sur* $\left[1,+\infty\right[$ *.*

   b) montrer que $f\circ h = h\circ f = Id$

   c) en déduire que f et h sont des bijections de $\left[1,+\infty\right[$ *vers* $\left[1,+\infty\right[$ *et déterminer leur bijection réciproque .*

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\left[0,12\right]$ *par* $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{12-x}$

1) a) Montrer que $(\forall x \in [0,12]) : 12-x \in [0,12]$ *et* $f(12-x)=f(x)$

b) Montrer que pour tout $(x,y)\in IR^{2}$ *les points* $M(x,y)$ *et* $M(12-x,y)$ *son symétriques par rapport à la droite* $(D):x=6$ *.*

c) En déduire que la droite $(D):x=6$ *est un axe de symétrie de la courbe* (C_f) *.*

2) étudier les variation de la fonction f sur $[0,6]$ *puis sur* $[6,12]$ *.*

3) En déduire la comparaison des nombres $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ *,* $\sqrt{3}+3$ *et* $\sqrt{5}+\sqrt{7}$

Exercice 17

On considère la fonction définie sur IR^{+} *par* $f(x)=E(x^{2})-2E(x)$

1. *a) montrer que* $(\forall x \in IR^{+}) : (E(x))^{2} \leq E(x^{2})$ *.*

   b) en déduire que -1 et le maximum absolu de f .
2. *on pose* $x=n+\dfrac{1}{2}$ *avec* $x \in IN$ *.*

   a) calculer $f(x)$ *en fonction de n .*

   b) en déduire que f n'est pas majorée .