

Exercice 1

1/4

Soit E un ensemble . A, B, C trois parties de E . Montrer les égalités suivantes :

- 1) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ 2) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
 3) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C = A - (B \cup C)$

Exercice 2

Soit E un ensemble . A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$
 Montrer que : $B = C$.

Exercice 3

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E .
 Montrer que : $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

Exercice 4

Soit E un ensemble . pour tout $A, B \in P(E)$ on pose $(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A)$

- 1) Montrer que : $A - B = A \cap \bar{B}$ et en déduire que $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
 2) Montrer les égalités suivantes : a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ b) $A \Delta B = \bar{A} \Delta \bar{B}$
 c) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ d) $A - B = (A \cup B) \Delta B$
 3) Montrer que : $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

Exercice 5

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E telles que : $B \subset A$ et $A \cap C = \emptyset$

Résoudre dans $P(E)$ le système $\begin{cases} A - X = B \\ X - A = C \end{cases}$

Exercice 6

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Montrer ce qui suit :

- 1) $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$ 2) $\begin{cases} B \subset A \\ C = A - B \end{cases} \Rightarrow A = B \cup C$ 3) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

Exercice 7

$$\varphi_A : E \rightarrow \{0,1\}$$

Soient A une parties d'un ensemble E . et on considère l'application

$$x \mapsto \begin{cases} 1 ; x \in A \\ 0 ; x \notin A \end{cases}$$

- 1) qu'elle est la condition nécessaire et suffisante pour que φ_A soit surjective ?
 2) Montrer que : $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$
 3) Montrer que l'application $\varphi : P(E) \rightarrow A(E, \{0,1\})$ est une bijection .
 $A \mapsto \varphi_A$
 4) Montrer que : a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B$ b) $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$
 c) $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \cdot \varphi_B$ d) $\varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$

Exercice 8

Soit E un ensemble non vide , A une parties de E .

on pose $A^- = \{B \in P(E) / B \subset A\}$ et $A^+ = \{B \in P(E) / A \subset B\}$

Montrer que l'application $f : P(E) \rightarrow A^- \times A^+$ est bijective .
 $X \mapsto (X \cap A, X \cup A)$

Exercice 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application . Montrer que :

- 1) $(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (\forall A \in P(E)) : f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
 2) $(f \text{ surjective}) \Leftrightarrow (\forall A \in P(E)) : \overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$

Exercice 10

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$

- 1) Montrer que $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$
- 2) Montrer que a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- 3) Montrer que si f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$
- 4) Montrer que a) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- 5) Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

Exercice 11

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$ et $B \subset F$

- 1) a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ b) Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$
- 2) a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ b) Montrer que si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$
- 3) a) Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$ b) Montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$

Exercice 12

Soit $f : E \rightarrow E$ une application et on considère les deux applications :

$$D : P(E) \rightarrow P(E) \quad R : P(E) \rightarrow P(E)$$

$$A \rightarrow f(A) \quad \text{et} \quad A \rightarrow f^{-1}(A)$$

- 1) (D injective) \Leftrightarrow (f injective) 2) (D surjective) \Leftrightarrow (f surjective)
- 1) (R surjective) \Leftrightarrow (f injective) 2) (R injective) \Leftrightarrow (f surjective)

Exercice 13

Soient A une parties d'un ensemble non vide E . et on considère l'application

$$f : P(E) \rightarrow P(A) \times P(\bar{A})$$

$$X \rightarrow (A \setminus X, \bar{A} \setminus X)$$

- 1) Montrer que f est injective 2) Montrer que f est surjective 3) Déterminer f^{-1}

Exercice 14

Soient A une parties d'un ensemble non vide E . et on considère l'application

$$f : P(A) \times P(\bar{A}) \rightarrow P(E)$$

$$(X, Y) \rightarrow X \cup Y$$

- 1) Montrer que f est injective 2) Montrer que f est surjective 3) Déterminer f^{-1}

Exercice 15

Soit E un ensemble non vide, et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$.

on considère l'application

$$f : P(A) \times P(\bar{A}) \rightarrow P(E)$$

$$(X, Y) \rightarrow X \cup Y$$

- 1) a) Déterminer $f(\emptyset)$ et $f(E)$ et $f(A)$ b) f est-elle injective ?
- 2) a) Montrer que l'équation $A \cup X = \bar{A}$ n'a pas de solutions dans $P(E)$
- b) f est-elle surjective ?

Exercice 16

Soit E un ensemble non vide, et $A, B \subset E$ telles que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

on considère l'application

$$f : P(E) \rightarrow P(A) \times P(B)$$

$$X \rightarrow (A \cap X, B \cap X)$$

- 1) a) Montrer que $(\forall X \in P(E)) : X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ b) Montrer que f est injective.
- 2) a) Montrer que $(\forall (X, Y) \in P(E) \times P(E)) : f(X \cup Y) = (X, Y)$
- b) Montrer que f est surjective. c) Déterminer f^{-1} .

Exercice 17

On considère les applications $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$

- 1) Montrer que : a) $(g \circ f \text{ injective}) \Rightarrow (f \text{ injective})$ b) $(g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective})$
 c) $(g \circ f \text{ injective et } f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ injective})$
 d) $(g \circ f \text{ surjective et } g \text{ injective}) \Rightarrow (f \text{ surjective})$
 e) $(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives}) \Rightarrow (f \text{ et } g \text{ et } h \text{ bijectives})$

Exercice 18

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + x + 2$

1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 2$ en déduire que l'application f n'est pas injective .

b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4}, +\infty \right[$.

2) Montrer que l'application $g : \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[\rightarrow \left[\frac{7}{4}, +\infty \right[$
 $x \mapsto x^2 + x + 2$ est une bijection puis déterminer f^{-1} .

Exercice 19

On considère l'application $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $f(x) < 1$.

b) En déduire que f n'est pas surjective .

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $f(-x-2) = f(x)$

b) f est-elle injective ?

3) Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 - 3x + 2$ n'est pas injective .

Exercice 20

Soit $a \in]-1, 1[$ et φ_a l'application définie par : $\varphi_a :]-1, 1[\rightarrow]-1, 1[$
 $x \mapsto \frac{x+a}{1+ax}$

1) Déterminer $\varphi_{-a} \circ \varphi_a$. 2) Montrer que φ_a est une bijection et déterminer φ_a^{-1} .

Exercice 21

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (f \circ f)(x) = 4x - 9$

1) Calculer $f(3)$

2) a) Montrer que f est injective b) Montrer que f est surjective

c) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 22

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer $f \circ f(x)$.

2) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} puis Calculer $f^{-1}(x)$

3) On considère l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 + 2x$. Déterminer $f \circ g(x)$

Exercice 23

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$.

montrer l'application $\varphi_\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$
 $n \mapsto E(n\alpha)$ est injective .

Exercice 24

4/4

montrer l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ est injective puis surjective
 $(m, n) \mapsto (2m + 1)2^n$

Exercice 25

Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $(\forall x \in E)(\exists n \in \mathbb{N}^*) : f^n(x) = x$
 (avec $f^n = \underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$) Montrer que f est injective .

Exercice 26

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : |f(x) - f(y)| = |x - y|$

1) Montrer que f est injective

2) on suppose que f vérifie $(\forall x \in \mathbb{R}) : (f \circ f)(x) = x + 2$. calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 27

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Exercice 28

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}^* - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^* - \{1\}) : f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$$

Exercice 29

Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ une application telle que

$$f(1) = 4 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(n+1) = \frac{1}{2}f(n) + \frac{3}{2} \quad \text{et on pose } g(n) = f(n) - 3$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : g(n+1) = \frac{1}{2}g(n)$ 2) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) déduire $f(n)$ en fonction de n .