Injectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$. Alors, f est injective. ».

Injectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$. Alors, f est injective. ».

Démonstration : soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a que $n + 1 = n' + 1$. Ceci montre que $n = n'$ et donc que f est injective.

Injectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$. Alors, f est injective. ».

Démonstration : soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a que $n + 1 = n' + 1$. Ceci montre que $n = n'$ et donc que f est injective.

Soit l'énoncé

« Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par $g(x) := (0, -x)$. Alors, g est injective. ».

Injectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$. Alors, f est injective. ».

Démonstration : soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a que $n + 1 = n' + 1$. Ceci montre que $n = n'$ et donc que f est injective.

Soit l'énoncé

« Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par $g(x) := (0, -x)$. Alors, g est injective. ».

Démonstration : soient x et x' deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $g(x) = g(x')$. Alors, par définition de g, on a que $(0, -x) = (0, -x')$. Ceci implique que $-x = -x'$ et ainsi, $x = x'$. L'application g est donc injective.

Surjectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est surjective si tout élément de F possède **au moins un** antécédent.

Surjectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est surjective si tout élément de F possède **au moins un** antécédent.

En d'autres termes, f est surjective si $\mathrm{Im}(f) = F$.

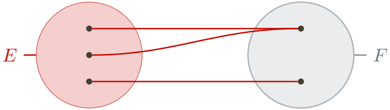
Surjectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est surjective si tout élément de F possède **au moins un** antécédent.

En d'autres termes, f est surjective si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Les applications surjectives admettent des représentations sagittales de la forme



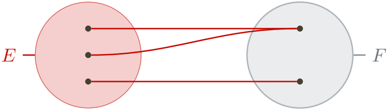
Surjectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

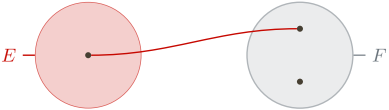
L'application f est surjective si tout élément de F possède **au moins un** antécédent.

En d'autres termes, f est surjective si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Les applications surjectives admettent des représentations sagittales de la forme



La configuration suivante est exclue en cas de surjectivité :



Surjectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3. Alors, f est surjective. ».

Surjectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3. Alors, f est surjective. ».

Démonstration : il s'agit de montrer que tout élément de $\{0, 1, 2\}$ admet au moins un antécédent. Par définition de f, on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$. Ceci montre que f est surjective.

Surjectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3. Alors, f est surjective. ».

Démonstration : il s'agit de montrer que tout élément de $\{0, 1, 2\}$ admet au moins un antécédent. Par définition de f, on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$. Ceci montre que f est surjective.

Soit l'énoncé

« Soit $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := y - x$. Alors, g est surjective. ».

Surjectivité — démonstrations

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3. Alors, f est surjective. ».

Démonstration : il s'agit de montrer que tout élément de $\{0, 1, 2\}$ admet au moins un antécédent. Par définition de f, on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$. Ceci montre que f est surjective.

Soit l'énoncé

« Soit $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := y - x$. Alors, g est surjective. ».

Démonstration : soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Par définition de g, on a $g((-x, 0)) = 0 - (-x) = x$. Nous avons ainsi montré que x admet au moins un antécédent. Par conséquent, g est surjective.

Bijectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est bijective si f est à la fois injective et surjective.

Bijectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est bijective si f est à la fois injective et surjective.

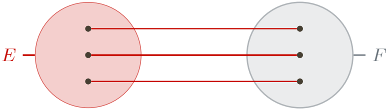
En d'autres termes, f est bijective si tout élément $y \in F$ admet **exactement un** antécédent.

Bijectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est bijective si f est à la fois injective et surjective.
En d'autres termes, f est bijective si tout élément $y \in F$ admet **exactement un** antécédent.

Les applications bijectives admettent des représentations sagittales de la forme



Bijectivité — démonstration 1

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$. Alors, f est bijective. ».

Bijectivité — démonstration 1

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$. Alors, f est bijective. ».

Démonstration : commençons par montrer que f est injective. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $f((x, y)) = f((x', y'))$. Alors, par définition de f, on a que $(-y, x) = (-y', x')$. Ceci implique que $-y = -y'$ et $x = x'$. On a ainsi $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que f est injective.

Bijectivité — démonstration 1

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$. Alors, f est bijective. ».

Démonstration : commençons par montrer que f est injective. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $f((x, y)) = f((x', y'))$. Alors, par définition de f, on a que $(-y, x) = (-y', x')$. Ceci implique que $-y = -y'$ et $x = x'$. On a ainsi $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que f est injective.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $(z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Par définition de f, on a $f((t, -z)) = (-(-z), t) = (z, t)$. Ainsi, (z, t) admet au moins un antécédent. Par conséquent, f est surjective.

Bijectivité — démonstration 1

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$. Alors, f est bijective. ».

Démonstration : commençons par montrer que f est injective. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $f((x, y)) = f((x', y'))$. Alors, par définition de f, on a que $(-y, x) = (-y', x')$. Ceci implique que $-y = -y'$ et $x = x'$. On a ainsi $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que f est injective.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $(z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Par définition de f, on a $f((t, -z)) = (-(-z), t) = (z, t)$. Ainsi, (z, t) admet au moins un antécédent. Par conséquent, f est surjective.

Nous avons montré que f est la fois et injective et surjective. Elle est donc bijective.

Bijectivité — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f(n) := \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, f est bijective. ».

Bijectivité — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f(n) := \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, f est bijective. ».

Quelques exemples :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = -1$;
- $f(2) = 1$;
- $f(3) = -2$;
- $f(4) = 2$;
- $f(5) = -3$;
- $f(6) = 3$;
- $f(7) = -4$;
- $f(8) = 4$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$. Ainsi, x admet au moins un antécédent. L'application f est donc surjective.

Bijectivité — démonstration 2

Démonstration : on commence par démontrer l'injectivité de f. Soient n et n' deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de f, on a nécessairement que n et n' sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque n et n' sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, f est injective.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}$. Si x est positif, par définition de f, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si x est strictement négatif, par définition de f, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$. Ainsi, x admet au moins un antécédent. L'application f est donc surjective.

Nous avons montré que f est la fois et injective et surjective. Elle est donc bijective.

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

Voici le théorème de comparaison de cardinaux d'ensembles par applications.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

Voici le théorème de comparaison de cardinaux d'ensembles par applications.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

1. s'il existe une application injective $f : E \to F$, on a $\#E \leqslant \#F$;

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

Voici le théorème de comparaison de cardinaux d'ensembles par applications.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

1. s'il existe une application injective $f : E \to F$, on a $\#E \leqslant \#F$;
2. s'il existe une application surjective $g : E \to F$, on a $\#E \geqslant \#F$;

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

Voici le théorème de comparaison de cardinaux d'ensembles par applications.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

1. s'il existe une application injective $f : E \to F$, on a $\#E \leqslant \#F$;
2. s'il existe une application surjective $g : E \to F$, on a $\#E \geqslant \#F$;
3. s'il existe une application bijective $h : E \to F$, on a $\#E = \#F$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

Voici le théorème de comparaison de cardinaux d'ensembles par applications.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

1. s'il existe une application injective $f : E \to F$, on a $\#E \leqslant \#F$;
2. s'il existe une application surjective $g : E \to F$, on a $\#E \geqslant \#F$;
3. s'il existe une application bijective $h : E \to F$, on a $\#E = \#F$.

Ce résultat est utile pour comparer les cardinaux de deux ensembles E et F sans avoir à les déterminer.

Il suffit pour cela de définir une application $f : E \to F$ et montrer qu'elle est injective, surjective ou bijective.

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

En considérant les contraposées des trois assertions du théorème précédent,

1. si $\#E > \#F$, il n'existe aucune application injective de E dans F ;
2. si $\#E < \#F$, il n'existe aucune application surjective de E dans F ;
3. si $\#E \neq \#F$, il n'existe aucune application bijective de E dans F.

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

En considérant les contraposées des trois assertions du théorème précédent,

1. si $\#E > \#F$, il n'existe aucune application injective de E dans F ;
2. si $\#E < \#F$, il n'existe aucune application surjective de E dans F ;
3. si $\#E \neq \#F$, il n'existe aucune application bijective de E dans F.

Exemple

Soit $E := [\![2, 6]\!] \times \{0, 1\}$ et $F := \{0, 1, 2\}^3$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

En considérant les contraposées des trois assertions du théorème précédent,

1. si $\#E > \#F$, il n'existe aucune application injective de E dans F ;
2. si $\#E < \#F$, il n'existe aucune application surjective de E dans F ;
3. si $\#E \neq \#F$, il n'existe aucune application bijective de E dans F.

Exemple

Soit $E := [\![2, 6]\!] \times \{0, 1\}$ et $F := \{0, 1, 2\}^3$.

Comme $\#E = 5 \times 2 = 10$ et $\#F = 3^3 = 27$, nous pouvons affirmer qu'il'existe aucune application surjective de E dans F.

Injectivité, surjectivité, bijectivité et ensembles finis

En considérant les contraposées des trois assertions du théorème précédent,

1. si $\#E > \#F$, il n'existe aucune application injective de E dans F ;
2. si $\#E < \#F$, il n'existe aucune application surjective de E dans F ;
3. si $\#E \neq \#F$, il n'existe aucune application bijective de E dans F.

Exemple

Soit $E := [\![2, 6]\!] \times \{0, 1\}$ et $F := \{0, 1, 2\}^3$.

Comme $\#E = 5 \times 2 = 10$ et $\#F = 3^3 = 27$, nous pouvons affirmer qu'il'existe aucune application surjective de E dans F.

La conséquence 1 s'appelle **principe des tiroirs**.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Si E et F sont deux ensembles finis tels quel $\#E > \#F$ et que $f : E \to F$ est une application, alors il existe (au moins) un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents par f.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Si E et F sont deux ensembles finis tels quel $\#E > \#F$ et que $f : E \to F$ est une application, alors il existe (au moins) un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents par f.

Exemple

Énoncé : « il existe en France deux personnes qui ont la même taille (en cm) et exactement la même date de naissance ».

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Si E et F sont deux ensembles finis tels quel $\#E > \#F$ et que $f : E \to F$ est une application, alors il existe (au moins) un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents par f.

Exemple

Énoncé : « il existe en France deux personnes qui ont la même taille (en cm) et exactement la même date de naissance ».

Démonstration. On sait qu'il y a en France environ 66.10^6 habitants.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Si E et F sont deux ensembles finis tels quel $\#E > \#F$ et que $f : E \to F$ est une application, alors il existe (au moins) un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents par f.

Exemple

Énoncé : « il existe en France deux personnes qui ont la même taille (en cm) et exactement la même date de naissance ».

Démonstration. On sait qu'il y a en France environ 66.10^6 habitants. De plus, il y a au maximum $250 \times 31 \times 12 \times 130 \simeq 12.10^6$ configurations de taille et de dates de naissance possibles.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Si E et F sont deux ensembles finis tels quel $\#E > \#F$ et que $f : E \to F$ est une application, alors il existe (au moins) un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents par f.

Exemple

Énoncé : « il existe en France deux personnes qui ont la même taille (en cm) et exactement la même date de naissance ».

Démonstration. On sait qu'il y a en France environ 66.10^6 habitants. De plus, il y a au maximum $250 \times 31 \times 12 \times 130 \simeq 12.10^6$ configurations de taille et de dates de naissance possibles.

Soit l'application $f : H \to C$ qui attribue à chaque habitant sa configuration de taille et de date de naissance.

Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce de la manière suivante.

Si E et F sont deux ensembles finis tels quel $\#E > \#F$ et que $f : E \to F$ est une application, alors il existe (au moins) un élément de F qui admet (au moins) deux antécédents par f.

Exemple

Énoncé : « il existe en France deux personnes qui ont la même taille (en cm) et exactement la même date de naissance ».

Démonstration. On sait qu'il y a en France environ 66.10^6 habitants. De plus, il y a au maximum $250 \times 31 \times 12 \times 130 \simeq 12.10^6$ configurations de taille et de dates de naissance possibles.

Soit l'application $f : H \to C$ qui attribue à chaque habitant sa configuration de taille et de date de naissance. Comme $\#H > \#C$, il existe, **d'après le principe des tiroirs**, nécessairement deux habitants $x, x' \in H$ tels que $f(x) = f(x')$.

Plan

Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

La composée de f et g, notée $g \circ f$, est l'application définie pour tout $x \in E$ par

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

On a $g \circ f : E \to G$.

Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

La composée de f et g, notée $g \circ f$, est l'application définie pour tout $x \in E$ par

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

On a $g \circ f : E \to G$.

Pour pouvoir composer deux applications f et g, il faut que f soit compatible avec g, c'est à dire,

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g).$$

Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

La composée de f et g, notée $g \circ f$, est l'application définie pour tout $x \in E$ par

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

On a $g \circ f : E \to G$.

Pour pouvoir composer deux applications f et g, il faut que f soit compatible avec g, c'est à dire,

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g).$$

Remarque : la composée des applications est la composée des relations binaires.

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe donc.

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe donc.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe donc.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lfloor x \rfloor)$$

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe donc.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lfloor x \rfloor) = |\lfloor x \rfloor|.$$

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe donc.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lfloor x \rfloor) = |\lfloor x \rfloor|.$$

Ainsi, $g \circ f$ est l'application qui envoie tout nombre réel sur la valeur absolue de sa partie entière.

Composition d'applications — exemple 1

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \lfloor x \rfloor$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}$ par $g(y) := |y|$.

On a par exemple $f(3) = 3$, $f(1.6) = 1$, $f(-2.1) = -3$, $g(5) = 5$ et $g(-2) = 2$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe donc.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lfloor x \rfloor) = |\lfloor x \rfloor|.$$

Ainsi, $g \circ f$ est l'application qui envoie tout nombre réel sur la valeur absolue de sa partie entière.

On a par exemple $(g \circ f)(-2.3) = 3$, $(g \circ f)(7) = 7$, $(g \circ f)(-8) = 8$ et $(g \circ f)(4.9) = 4$.

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z,t)) := (t,z)$.

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z,t)) := (t,z)$.

On a par exemple $f(4) = (4,5)$, $f(7) = (0,0)$ et $g((3,9)) = (9,3)$.

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z,t)) := (t,z)$.

On a par exemple $f(4) = (4,5)$, $f(7) = (0,0)$ et $g((3,9)) = (9,3)$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe.

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z,t)) := (t,z)$.

On a par exemple $f(4) = (4,5)$, $f(7) = (0,0)$ et $g((3,9)) = (9,3)$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z,t)) := (t,z)$.

On a par exemple $f(4) = (4,5)$, $f(7) = (0,0)$ et $g((3,9)) = (9,3)$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \begin{cases} g((x, x+1)) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ g((0,0)) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z,t)) := (t,z)$.

On a par exemple $f(4) = (4,5)$, $f(7) = (0,0)$ et $g((3,9)) = (9,3)$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \begin{cases} g((x, x+1)) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ g((0,0)) & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x+1, x) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Composition d'applications — exemple 2

Exemple

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux applications définies pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$f(x) := \begin{cases} (x, x+1) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $(z, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $g((z, t)) := (t, z)$.

On a par exemple $f(4) = (4, 5)$, $f(7) = (0, 0)$ et $g((3, 9)) = (9, 3)$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, f est compatible avec g. La composée $g \circ f$ existe.

Calculons $g \circ f$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \begin{cases} g((x, x+1)) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ g((0,0)) & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x+1, x) & \text{si } x \text{ est pair,} \\ (0,0) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a par exemple $(g \circ f)(4) = (5, 4)$ et $(g \circ f)(7) = (0, 0)$.

Inversion d'applications

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Inversion d'applications

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

L'inverse de f, noté f^{-1}, est l'application définie pour tout $y \in F$ par

$$f^{-1}(y) := x \text{ lorsque } f^{-1}(\{y\}) = \{x\}.$$

Inversion d'applications

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

L'inverse de f, noté f^{-1}, est l'application définie pour tout $y \in F$ par

$$f^{-1}(y) := x \text{ lorsque } f^{-1}(\{y\}) = \{x\}.$$

On a $f^{-1} : F \to E$.

Inversion d'applications

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

L'inverse de f, noté f^{-1}, est l'application définie pour tout $y \in F$ par

$$f^{-1}(y) := x \text{ lorsque } f^{-1}(\{y\}) = \{x\}.$$

On a $f^{-1} : F \to E$.

Remarque : l'inverse des applications est l'inverse des relations binaires.

Inversion d'applications — exemples

Exemple

Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ l'application définie par $f(0) := 3$, $f(1) := 4$ et $f(2) := 5$.

Inversion d'applications — exemples

Exemple

Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ l'application définie par $f(0) := 3$, $f(1) := 4$ et $f(2) := 5$.

Cette application est injective (tous les éléments du domaine possèdent deux à deux des images différentes) et surjective (l'image de f est l'ensemble $\{3, 4, 5\}$. Elle est donc bijective. On peut donc calculer son inverse.

Inversion d'applications — exemples

Exemple

Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ l'application définie par $f(0) := 3$, $f(1) := 4$ et $f(2) := 5$.

Cette application est injective (tous les éléments du domaine possèdent deux à deux des images différentes) et surjective (l'image de f est l'ensemble $\{3, 4, 5\}$. Elle est donc bijective. On peut donc calculer son inverse.

L'inverse $f^{-1} : \{3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2\}$ vérifie $f^{-1}(3) = 0$, $f^{-1}(4) = 1$ et $f^{-1}(5) = 2$.

Inversion d'applications — exemples

Exemple

Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ l'application définie par $f(0) := 3$, $f(1) := 4$ et $f(2) := 5$.

Cette application est injective (tous les éléments du domaine possèdent deux à deux des images différentes) et surjective (l'image de f est l'ensemble $\{3, 4, 5\}$. Elle est donc bijective. On peut donc calculer son inverse.

L'inverse $f^{-1} : \{3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2\}$ vérifie $f^{-1}(3) = 0$, $f^{-1}(4) = 1$ et $f^{-1}(5) = 2$.

Exemple

Soit $g := \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par $g(x) := x - 1$.

Inversion d'applications — exemples

Exemple

Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ l'application définie par $f(0) := 3$, $f(1) := 4$ et $f(2) := 5$.

Cette application est injective (tous les éléments du domaine possèdent deux à deux des images différentes) et surjective (l'image de f est l'ensemble $\{3, 4, 5\}$. Elle est donc bijective. On peut donc calculer son inverse.

L'inverse $f^{-1} : \{3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2\}$ vérifie $f^{-1}(3) = 0$, $f^{-1}(4) = 1$ et $f^{-1}(5) = 2$.

Exemple

Soit $g := \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par $g(x) := x - 1$.

Cette application est bijective (**exercice** : le démontrer). On peut donc calculer son inverse.

Inversion d'applications — exemples

Exemple

Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ l'application définie par $f(0) := 3$, $f(1) := 4$ et $f(2) := 5$.

Cette application est injective (tous les éléments du domaine possèdent deux à deux des images différentes) et surjective (l'image de f est l'ensemble $\{3, 4, 5\}$. Elle est donc bijective. On peut donc calculer son inverse.

L'inverse $f^{-1} : \{3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2\}$ vérifie $f^{-1}(3) = 0$, $f^{-1}(4) = 1$ et $f^{-1}(5) = 2$.

Exemple

Soit $g := \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par $g(x) := x - 1$.

Cette application est bijective (**exercice** : le démontrer). On peut donc calculer son inverse.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, par définition de g, l'unique antécédent de x par g est $x + 1$. Ainsi, l'inverse $g^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $g^{-1}(x) = x + 1$.

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Comme l'inverse f^{-1} est une application de F dans E, f^{-1} est compatible avec f et f est compatible avec f^{-1}.

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Comme l'inverse f^{-1} est une application de F dans E, f^{-1} est compatible avec f et f est compatible avec f^{-1}.

Par conséquent, les applications $f \circ f^{-1} : F \to F$ et $f^{-1} \circ f : E \to E$ sont bien définies et vérifient la propriété suivante.

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Comme l'inverse f^{-1} est une application de F dans E, f^{-1} est compatible avec f et f est compatible avec f^{-1}.

Par conséquent, les applications $f \circ f^{-1} : F \to F$ et $f^{-1} \circ f : E \to E$ sont bien définies et vérifient la propriété suivante.

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Comme l'inverse f^{-1} est une application de F dans E, f^{-1} est compatible avec f et f est compatible avec f^{-1}.

Par conséquent, les applications $f \circ f^{-1} : F \to F$ et $f^{-1} \circ f : E \to E$ sont bien définies et vérifient la propriété suivante.

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.

On a alors

$$f \circ f^{-1} = I_F$$

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Comme l'inverse f^{-1} est une application de F dans E, f^{-1} est compatible avec f et f est compatible avec f^{-1}.

Par conséquent, les applications $f \circ f^{-1} : F \to F$ et $f^{-1} \circ f : E \to E$ sont bien définies et vérifient la propriété suivante.

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.

On a alors

$$f \circ f^{-1} = I_F$$

et

$$f^{-1} \circ f = I_E,$$

Composition d'une application avec son inverse

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application **bijective**.

Comme l'inverse f^{-1} est une application de F dans E, f^{-1} est compatible avec f et f est compatible avec f^{-1}.

Par conséquent, les applications $f \circ f^{-1} : F \to F$ et $f^{-1} \circ f : E \to E$ sont bien définies et vérifient la propriété suivante.

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.

On a alors

$$f \circ f^{-1} = I_F$$

et

$$f^{-1} \circ f = I_E,$$

où $I_F : F \to F$ et $I_E : E \to E$ sont les applications identités respectivement sur F et E.

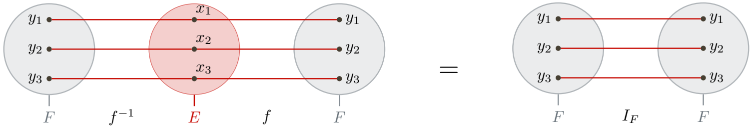
Composition d'une application avec son inverse

Pour comprendre le théorème précédent, on peut observer les représentations sagittales de $f \circ f^{-1}$ et de $f^{-1} \circ f$.

Composition d'une application avec son inverse

Pour comprendre le théorème précédent, on peut observer les représentations sagittales de $f \circ f^{-1}$ et de $f^{-1} \circ f$.

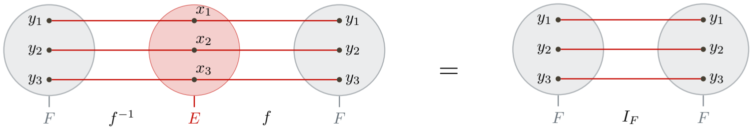
Concernant $f \circ f^{-1}$:



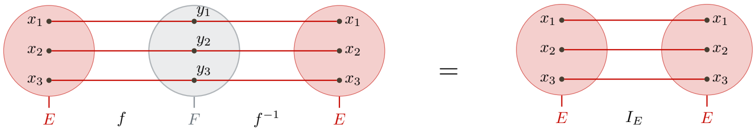
Composition d'une application avec son inverse

Pour comprendre le théorème précédent, on peut observer les représentations sagittales de $f \circ f^{-1}$ et de $f^{-1} \circ f$.

Concernant $f \circ f^{-1}$:



Concernant $f^{-1} \circ f$:



Composition d'une application avec son inverse

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

Si l'on a

$$f \circ g = I_F$$

et

$$g \circ f = I_E,$$

alors f et g sont des bijections et l'une est l'inverse de l'autre.

Composition d'une application avec son inverse

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

Si l'on a

$$f \circ g = I_F$$

et

$$g \circ f = I_E,$$

alors f et g sont des bijections et l'une est l'inverse de l'autre.

Ce théorème, appelé théorème de l'inversion, fournit un moyen pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est une bijection en réalisant les étapes suivantes :

Composition d'une application avec son inverse

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

Si l'on a

$$f \circ g = I_F$$

et

$$g \circ f = I_E,$$

alors f et g sont des bijections et l'une est l'inverse de l'autre.

Ce théorème, appelé théorème de l'inversion, fournit un moyen pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est une bijection en réalisant les étapes suivantes :

1. définir une application $g : F \to E$;

Composition d'une application avec son inverse

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

Si l'on a

$$f \circ g = I_F$$

et

$$g \circ f = I_E,$$

alors f et g sont des bijections et l'une est l'inverse de l'autre.

Ce théorème, appelé théorème de l'inversion, fournit un moyen pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est une bijection en réalisant les étapes suivantes :

1. définir une application $g : F \to E$;
2. démontrer que l'on a $f \circ g = I_F$;

Composition d'une application avec son inverse

Théorème

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

Si l'on a

$$f \circ g = I_F$$

et

$$g \circ f = I_E,$$

alors f et g sont des bijections et l'une est l'inverse de l'autre.

Ce théorème, appelé théorème de l'inversion, fournit un moyen pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est une bijection en réalisant les étapes suivantes :

1. définir une application $g : F \to E$;
2. démontrer que l'on a $f \circ g = I_F$;
3. démontrer que l'on a $g \circ f = I_E$.

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y))$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x))$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y)$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

et

$$(g \circ f)((x, y))$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

et

$$(g \circ f)((x, y)) = g((-y, x))$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

et

$$(g \circ f)((x, y)) = g((-y, x)) = (x, -(-y))$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

et

$$(g \circ f)((x, y)) = g((-y, x)) = (x, -(-y)) = (x, y).$$

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

et

$$(g \circ f)((x, y)) = g((-y, x)) = (x, -(-y)) = (x, y).$$

On a donc $f \circ g = I_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = I_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

Utilisation du théorème de l'inversion

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$.

Considérons l'application $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $g((x, y)) := (y, -x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On a alors

$$(f \circ g)((x, y)) = f((y, -x)) = (-(-x), y) = (x, y)$$

et

$$(g \circ f)((x, y)) = g((-y, x)) = (x, -(-y)) = (x, y).$$

On a donc $f \circ g = I_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ et $g \circ f = I_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

Ainsi, par le théorème de l'inversion, f est bijective et son inverse est g.