

## Série: Ensembles et Applications

### Exercice 1:

On pose  $E = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Et on considère l'application  $f$  définie de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f((x, y)) = (xy, \frac{y}{x})$

- 1) Montrer que  $f$  est injective et surjective.
- 2) En déduire que l'application  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

### Exercice 2:

Soit  $E$  un ensemble et  $f$  une application de  $\mathcal{P}(E)$  vers  $\mathcal{P}(E)$  telle que :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \forall Y \in \mathcal{P}(E), \begin{cases} f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y) \\ f(X \cap Y) = f(X) \cup f(Y) \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{P}(E), \forall Y \in \mathcal{P}(E), X \subset Y \Rightarrow f(Y) \subset f(X)$
- 2) On suppose que  $f$  est surjective, déterminer  $f(E)$  ;  $f(\emptyset)$
- 3) On suppose que  $f$  est bijective, montrer que :  $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(C_E^X) \subset C_E^{f(X)}$

### Exercice 3:

$E$  est un ensemble non vide, .Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on définit l'application  $f_A$  (appelée fonction caractéristique de la partie  $A$ ) de  $E$  vers  $\{0,1\}$  telle que pour  $x$  de  $E$ :

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 ; x \in A \\ f_A(x) = 0 ; x \notin A \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(E)$  :

- |   |   |
|---|---|
| a) $A \subset B \Leftrightarrow f_A \leq f_B$     | b) $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$              |
| c) $f_A^2 = f_A$                                  | d) $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$                |
| e) $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$                        | f) $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \times f_B$    |
| g) $f_{A-B} = f_A(1 - f_B)$                       | h) $f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2f_A \times f_B$ |
| i) $f_{A \Delta B} = (f_A - f_B)^2 =  f_A - f_B $ |   |

### Exercice4:

Soit  $f$  l'application de  $E$  vers  $F$  et  $g$  l'application de  $F$  vers  $G$ . Montrer les deux implications suivantes:

- 4) **(f injective)  $\Rightarrow$  (gof injective)**
- 5) **(g surjective)  $\Rightarrow$  (gof surjective)**

### Exercice5:

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vide et  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .  $A$  est une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

- a) Montrer que :  $A \subset f^{-1}(f(A))$  et  $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- b) Montrer que si  $f$  est surjective alors  $f(f^{-1}(B)) = B$  quelle que soit la partie  $B$

### Exercice6:

$f$  est une application de  $E$  vers  $F$ . soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- 6) Montrer que :
  - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
  - $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
  - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- 7) Montrer que si  $f$  est injective, alors  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$