Série: Ensembles et Applications

Exercice 1:

On pose $E = IR^2$ .Soit l'application f définie de E vers E par : $f((x, y)) = (x + y, xy)$

1) Montrer que : $\forall (x, y) \in IR^2$; $f((x, y)) = f((y, x))$.

2) f est-elle injective ?

3) Montrer que f n'est pas surjective

4) Soient les deux ensembles : $A = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ x \le y \}$; $B = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ x^2 - 4y \ge 0 \}$.

a) Montrer que : $f(A) = B$.

b) Soit g la restriction de f à l'ensemble A

c) Montrer que g est une bijection de A vers B et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2:

A est une partie d'un ensemble E.

Soit l'application f de P(E) vers P(E) telle que : $\forall X \in P(E): f(X) = A \cap X$

1) Déterminer : $f(\phi)$; $f(E)$; $f(A)$

2) Déterminer : $f(B)$ إذا كان $B \subset A$

3) F est-elle bijective ?

4) On suppose que $E = \{u, v, t\}$ et $A = \{t\}$

a) Déterminer P(E)

b) Définir l'application f à l'aide du diagramme de Venn

c) Déterminer les propriétés de l'application f (injectivité et surjectivité)

Exercice 3:

Soit E un ensemble non vide et soit f l'application définie par : $\begin{array}{l} f : P(E) \to P(E) \\ \quad X \mapsto \overline{X} \end{array}$

1) Déterminer : $f(\overline{A})$; $f(E)$; $f(\phi)$ avec : $A \in P(E)$

2) Déterminer : $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$ avec : $A \in P(E)$ و $B \in P(E)$.

3) Montrer que l'application f est bijective et déterminer $f^{-1}(X)$ pour tout $X \in P(E)$.

4) On suppose que : $E = IR$.

a) Déterminer $f(\{0,1\})$, $f(IR^+)$ et $f([-2,3[)$

b) Déterminer $fof(X)$ pour tout $X \in P(E)$.

Exercice 4:

Soit E un ensemble non vide et A une partie fixée de E. soit f_A l'application définie par : $\begin{array}{l} f_A : P(E) \to P(E) \\ \quad X \mapsto A \Delta X \end{array}$

1) Déterminer : $f_A(\phi)$; $f_A(E)$; $f_A(\overline{A})$; $f_A(A)$ avec : $A \in P(E)$

2) Soit $X \in P(E)$.

a) Montrer que : $A \Delta (A \Delta X)$

b) Déterminer l'application : $f_A o f_A$

c) En déduire que l'application f_A est bijective et détermine sa bijection réciproque f_A^{-1} .

d) En déduire que : $\forall B \in P(E)$; $\forall C \in P(E)$; $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$