Série:Applications et généralité sur les fonctions

Exercice 1:

Soient f et g les applications définies de IN vers IN telles que :

$$\begin{cases} g(x)=\frac{x}{2} \;;\; \text{si } x \text{ est pair} \\ g(x)=\frac{x-1}{2} \;;\; \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \quad ; \quad f(x)=2x$$

1) f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

2) Déterminer fog et gof .

Exercice 2:

soient a et b b deux reéls donnés et soit l'application f de IR vers IR vérifiant les deux conditions :

$$\forall x \in IR \;;\; f(x)\times f(1-x)=f(ax+b) \quad \text{et} \quad f \text{ injective}$$

1) Montrer que : $a=0$

2) Montrer que : $f(1-b)=1$.

3) Montrer que f est non surjective.

Exercice 3:

soient a et b b deux reéls tels que $a\neq 0$ et $a\neq 1$.

et soit l'application g de IR vers IR telle que : $g(x)=ax+b$

1) Déterminer $gog(x)$ et $gogog(x)$ pour tout x de IR.

2) On pose : $g^{(1)}=g$ et pour tout n de IN tels que $n\geq 2$: $g^{(n)}=\underbrace{gogogo...og}_{n\text{fois}}$

3) Montrer par récurrence que pour tout n de IN : « $(\forall x \in IR)$; $g^{(n)}(x)=a^n x+b\frac{1-a^n}{1-a}$

Exercice 4:

1) Soit l'application f de IR vers IR telle que : $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$.

a) Montrer que : $\forall x \in IR \;;\; f(x)<0$

b) Montrer que : $\forall (x,y)\in IR^2 \;;\; f(x)-f(x)=(x-y)\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)+(\sqrt{1+y^2}-y)}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}\right]$

En déduire que f est une application injective.

c) Montrer que : $\forall (x,y)\in IR^2 \;;\; x+\sqrt{1+x^2}=-\frac{1}{f(x)}$

d) Montrer que f est une bijection de IR vers IR_-^* et déterminer sa bijection réciproque.

2) Soit la fonction g définie par : $g(x)=x-\sqrt{1+x^2}$.

a) Déterminer D_g .

b) Etudier les variations de g sur D_g .

Exercice 5:

Soit l'application f de $[1,+\infty[$ vers $[\sqrt{2},+\infty[$ « définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

1) Montrer que : $\forall x\geq 1 \;;\; \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{f(x)}$

2) En déduiref est une bijection.