Série 4 :Ensembles et Applications

Exercice 1 :

On considère les ensembles non vides E et F et l'application f de E vers F. Soit A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice 2 :

Montrer dans chacun des cas suivant que f n'est pas injective.

a) f est une application de IN vers IN , telle que : $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$.

b) f est une application de IN^2 vers IN , telle que : $f((n,p)) = n+p+1$.

Exercice 3 :

On considère l'application f de IR vers IR^*, telle que : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Montrer que f est injective et non surjective.

Exercice 4 :

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa réciproque dans chacun des cas suivants :

a) f est une application de $[2, +\infty[$ vers IR^+ telle que : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

b) f est une application de IR^+ vers IR^+ telle que : $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 5 :

E est une ensemble non vide, pour toute partie A de E, on considère l'application

f_A de E vers $\{0 , 1\}$ définie par (on l'appelle fonction caractéristique de A) : $\begin{cases} f_A(x) = 1 \ ; \ x \in A \\ f_A(x) = 0 \ ; \ x \notin A \end{cases}$.

Exercice 6 :

Montrer que :

a) $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$

b) $f_{\overline{A}} = f_E - f_A$

c) $f_{A\cap B} = f_A \times f_B$

d) $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\times B}$

Exercice 7 :

On considère l'application f définie de $[1,+\infty[$ vers $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

1) Montrer que : $\forall x \geq 1 \ ; \ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{f(x)}$

2) En déduire que f est bijective.

Exercice 8 :

On considère l'application f définie sur IR par :

$$\forall x \in IR \ ; \ x + |f(x) - 1| = 2f(x) - 2$$

1) Calculer f(0).

2) Montrer que : $\forall x \in IR \ ; \ x(f(x) - 1) \geq 0$

3) En déduire que : $\forall x \in IR \ ; \ f(x) = \frac{|x|(x+2) - x}{2|x| - x}$

4) Montrer que f est une bijection de IR vers IR.